算数・数学で遊ぼう！

中川 幸一[1]

科学者の芽[2]

May 9, 2015

[1] k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

[2] http://www.mirai.saitama-u.ac.jp/

Outline

Euclid の原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclid の原論には以下の 5 つの公準が要請されています．

5 つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること．
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること．
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること．
4. すべての直角が互いに等しいこと．
5. 1 つの直線が 2 つの直線と交わり，その一方の側にできる 2 つの角を合わせて 2 直角より小さくなるとき，それらの 2 つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて 2 直角より小さい角のできる側で交わること．

[a] 半径のこと．

Euclid の原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclid の原論には以下の 5 つの公準が要請されています．

5 つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること．
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること．
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること．
4. すべての直角が互いに等しいこと．
5. 1 つの直線が 2 つの直線と交わり，その一方の側にできる 2 つの角を合わせて 2 直角より小さくなるとき，それらの 2 つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて 2 直角より小さい角のできる側で交わること．

[a]半径のこと．

Euclid の原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclid の原論には以下の 5 つの公準が要請されています.

5 つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること.
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること.
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること.
4. すべての直角が互いに等しいこと.
5. 1 つの直線が 2 つの直線と交わり，その一方の側にできる 2 つの角を合わせて 2 直角より小さくなるとき，それらの 2 つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて 2 直角より小さい角のできる側で交わること.

[a]半径のこと.

Euclid の原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclid の原論には以下の 5 つの公準が要請されています．

5 つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること．
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること．
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること．
4. すべての直角が互いに等しいこと．
5. 1 つの直線が 2 つの直線と交わり，その一方の側にできる 2 つの角を合わせて 2 直角より小さくなるとき，それらの 2 つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて 2 直角より小さい角のできる側で交わること．

[a]半径のこと．

Euclidの原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclidの原論には以下の5つの公準が要請されています．

5つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること．
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること．
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること．
4. すべての直角が互いに等しいこと．
5. 1つの直線が2つの直線と交わり，その一方の側にできる2つの角を合わせて2直角より小さくなるとき，それらの2つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて2直角より小さい角のできる側で交わること．

[a]半径のこと．

Euclid の原論

他の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことを**公理**といい，それに準じて要請される前提を**公準**といいます．Euclid の原論には以下の 5 つの公準が要請されています.

5 つの公準

1. 任意の点から任意の点まで直線が引けること.
2. 限られた直線をそれに続いて真っ直ぐに延長できること.
3. 任意の中心と距離[a]をもった円を描くことができること.
4. すべての直角が互いに等しいこと.
5. 1 つの直線が 2 つの直線と交わり，その一方の側にできる 2 つの角を合わせて 2 直角より小さくなるとき，それらの 2 つの直線をどこまでも延長すれば，合わせて 2 直角より小さい角のできる側で交わること.

[a]半径のこと.

5つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分ですが，公準1で要請しているように2点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3]が必要です．また公準2で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです．次に公準3で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです．公準4の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです．公準5は平行線の公理と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない2直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき，「線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」というような使い方はできません．コンパスは紙から離したら必ず折り畳むという約束の下使えます．

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

5つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分です が，公準1で要請しているように2点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3]が必要です． また公準2で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです． 次に公準3で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです． 公準4の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです． 公準5は平行線の公理と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない2直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき，「線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」というような使い方はできません． コンパスは紙から離したら必ず折り畳むという約束の下使えます．

---

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

5 つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分です が，公準 1 で要請しているように 2 点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3]が必要です． また公準 2 で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです． 次に公準 3 で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです． 公準 4 の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです． 公準 5 は平行線の公理と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない 2 直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき,「線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」というような使い方はできません． コンパスは紙から離したら必ず折り畳むという約束の下使えます．

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

5 つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分です が，公準 1 で要請しているように 2 点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3] が必要です． また公準 2 で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです． 次に公準 3 で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです． 公準 4 の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです． 公準 5 は平行線の公理と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない 2 直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき，「線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」というような使い方はできません． コンパスは紙から離したら必ず折り畳むという約束の下使えます．

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

5つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分です が，公準 1 で要請しているように 2 点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3]が必要です． また公準 2 で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです． 次に公準 3 で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです． 公準 4 の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです． 公準 5 は平行線の公理と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない 2 直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき，「線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」というような使い方はできません． コンパスは紙から離したら必ず折り畳むという約束の下使えます．

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

5つの公準の意味

点を描くには鉛筆だけあれば十分です が，公準 1 で要請しているように 2 点を直線で結ぶには真っ直ぐな定木[3] が必要です． また公準 2 で要請していることは，必要に応じていくらでも長い直線が引けるような定木が与えられているということです． 次に公準 3 で要請していることは，十分に大きなコンパスが与えられているということです． 公準 4 の意味は異なる直線を使って作った直角はすべて等しいということです． 公準 5 は**平行線の公理**と言われているものですが，ここではあえて深いことには入り込まず，平行でない 2 直線はいつか交わるくらいにとらえておいてください．

コンパスの使い方の注意

点 O と線分 AB が与えられているとき,「**線分 AB の距離を写して点 O を中心とする円を描く」**というような使い方はできません． **コンパスは紙から離したら必ず折り畳む**という約束の下使えます．

[3]「定規」だと目盛りが付いたものさしを連想させるので，目盛りが付いていない直線を引くだけの道具ということを強調させるために「定木」と表記します．

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

Euclid 幾何に必要なもの

つまり Euclid 幾何では以下の 4 つが与えられているだけです.

Euclid 幾何に必要なもの

- 白い紙
- 鉛筆
- 直線を引くための定木
- 円を描くためのコンパス

和と差

平面に 1 つの線分が与えられていて，それを長さ 1 としたとき，この線分から定木とコンパスでどのような数を作ることができるかを考える．
その線分を定木で伸ばして x 軸を作り，線分の一端を原点として垂直な線分を引き y 軸を作る．このとき座標軸上に $0, \pm1, \pm2, \ldots$ という目盛りをつけることはコンパスで簡単にできる ので，任意の整数 m, n に対して格子点 (m, n) の点は定木とコンパスで簡単に作れる． よって $(a, 0)$, $(b, 0)$ が与えられたとき $(a + b, 0)$ や $(a - b, 0)$ を作ることは容易である．

和と差

平面に 1 つの線分が与えられていて，それを長さ 1 としたとき，この線分から定木とコンパスでどのような数を作ることができるかを考える．その線分を定木で伸ばして x 軸を作り，線分の一端を原点として垂直な線分を引き y 軸を作る．このとき座標軸上に $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ という目盛りをつけることはコンパスで簡単にできるので，任意の整数 m，n に対して格子点 (m, n) の点は定木とコンパスで簡単に作れる．よって $(a, 0)$, $(b, 0)$ が与えられたとき $(a+b, 0)$ や $(a-b, 0)$ を作ることは容易である．

和と差

平面に 1 つの線分が与えられていて，それを長さ 1 としたとき，この線分から定木とコンパスでどのような数を作ることができるかを考える．その線分を定木で伸ばして x 軸を作り，線分の一端を原点として垂直な線分を引き y 軸を作る．このとき座標軸上に $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ という目盛りをつけることはコンパスで簡単にできる ので，任意の整数 m，n に対して格子点 (m, n) の点は定木とコンパスで簡単に作れる． よって $(a, 0)$, $(b, 0)$ が与えられたとき $(a+b, 0)$ や $(a-b, 0)$ を作ることは容易である．

和と差

平面に 1 つの線分が与えられていて，それを長さ 1 としたとき，この線分から定木とコンパスでどのような数を作ることができるかを考える．その線分を定木で伸ばして x 軸を作り，線分の一端を原点として垂直な線分を引き y 軸を作る．このとき座標軸上に $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ という目盛りをつけることはコンパスで簡単にできる ので，任意の整数 m，n に対して格子点 (m, n) の点は定木とコンパスで簡単に作れる． よって $(a, 0)$, $(b, 0)$ が与えられたとき $(a + b, 0)$ や $(a - b, 0)$ を作ることは容易である．

積と商

$(0,1)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,b)$ を通る直線と x 軸との交点は $(ab,0)$ である.
同様に考えれば $(0,b)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,1)$ を通る直線と x 軸との交点は $(\frac{a}{b},0)$ である.

積と商

$(0,1)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,b)$ を通る直線と x 軸との交点は $(ab,0)$ である．
同様に考えれば $(0,b)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,1)$ を通る直線と x 軸との交点は $(\frac{a}{b},0)$ である．

積と商

$(0,1)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,b)$ を通る直線と x 軸との交点は $(ab,0)$ である.
同様に考えれば $(0,b)$ と $(a,0)$ を通る直線に平行な直線で $(0,1)$ を通る直線と x 軸との交点は $(\frac{a}{b},0)$ である.

平方根そして「定木とコンパス」で作れる数

ここでは難しい話を避けることにするが，円 ($(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$) と直線 ($ax+by+c=0$) の交点を求めることは 1 次式と 2 次式の連立方程式の解を求めることと同じなので，これは平方根の値を求めることに他ならない．

つまり「定木とコンパス」で作れる数は整数の加減乗除及び平方根を開くという操作を有限回繰り返して行って得られる数に限られる． つまり，二次方程式や一次方程式を繰り返し解いて得られる範囲の数ならば作図によって求めることができるということなので，いくつかの二次方程式や一次方程式に帰着できる問題は定木とコンパスのみで作図可能である．

平方根そして「定木とコンパス」で作れる数

ここでは難しい話を避けることにするが，円 $((x-p)^2+(y-q)^2=r^2)$ と直線 $(ax+by+c=0)$ の交点を求めることは 1 次式と 2 次式の連立方程式の解を求めることと同じなので，これは平方根の値を求めることに他ならない．
つまり「定木とコンパス」で作れる数は整数の加減乗除及び平方根を開くという操作を有限回繰り返して行って得られる数に限られる． つまり，二次方程式や一次方程式を繰り返し解いて得られる範囲の数ならば作図によって求めることができるということなので，いくつかの二次方程式や一次方程式に帰着できる問題は定木とコンパスのみで作図可能である．

平方根そして「定木とコンパス」で作れる数

ここでは難しい話を避けることにするが，円 $((x-p)^2+(y-q)^2=r^2)$ と直線 $(ax+by+c=0)$ の交点を求めることは 1 次式と 2 次式の連立方程式の解を求めることと同じなので，これは平方根の値を求めることに他ならない．
つまり「定木とコンパス」で作れる数は整数の加減乗除及び平方根を開くという操作を有限回繰り返して行って得られる数に限られる． つまり，二次方程式や一次方程式を繰り返し解いて得られる範囲の数ならば作図によって求めることができるということなので，いくつかの二次方程式や一次方程式に帰着できる問題は定木とコンパスのみで作図可能である．

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- (角の 3 等分問題) 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題

ギリシャ数学の三大問題

- **(円積問題)** 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(立方体倍積問題)** 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体の辺を定木とコンパスだけを使って作れ.
- **(角の 3 等分問題)** 与えられた角を定木とコンパスだけを使って 3 等分せよ.

ギリシャ数学の三大問題の作図不可能性

円積問題は結局 π という値が作図できるかという問題に帰着されるが，この値[4] は定木とコンパスでは作図できないことが知られている． また，立方体倍積問題と角の3等分問題は三次方程式を解かないといけないが，定木とコンパスのみの作図では二次方程式までしか解けないので作図できない．

[4]円周率 π は有理数を係数とする方程式の解にはなり得ない **超越数** と呼ばれる数である．

ギリシャ数学の三大問題の作図不可能性

円積問題は結局 π という値が作図できるかという問題に帰着されるが，この値[4] は定木とコンパスでは作図できないことが知られている． また，立方体倍積問題と角の 3 等分問題は三次方程式を解かないといけないが，定木とコンパスのみの作図では二次方程式までしか解けないので作図できない．

[4]円周率 π は有理数を係数とする方程式の解にはなり得ない **超越数** と呼ばれる数である．

長方形 $ABCD$ に対して辺 CD 上に点 E をとり，$\angle EAB$ の角を 3 等分する．

折り紙による角の3等分の折り方

1. 辺 AD 上に点 F をとる．
2. A と F を重ねて折ったとき辺 AD 上の折り目との交点を G，辺 BC 上の折り目との交点を H とする．
3. F を線分 AE 上に， A を GH 上に重なるように折り，それぞれの写った点を F'，A' とする．
4. $\angle EAB = 3\angle A'AB$ となっている．

長方形 $ABCD$ に対して辺 CD 上に点 E をとり，$\angle EAB$ の角を 3 等分する．

折り紙による角の3等分の折り方

1. 辺 AD 上に点 F をとる．
2. A と F を重ねて折ったとき辺 AD 上の折り目との交点を G，辺 BC 上の折り目との交点を H とする．
3. F を線分 AE 上に， A を GH 上に重なるように折り，それぞれの写った点を F'，A' とする．
4. $\angle EAB = 3\angle A'AB$ となっている．

折り紙による角の3等分

長方形 $ABCD$ に対して辺 CD 上に点 E をとり，$\angle EAB$ の角を 3 等分する.

折り紙による角の3等分の折り方

1. 辺 AD 上に点 F をとる.
2. A と F を重ねて折ったとき辺 AD 上の折り目との交点を G，辺 BC 上の折り目との交点を H とする.
3. F を線分 AE 上に， A を GH 上に重なるように折り，それぞれの写った点を F'，A' とする.
4. $\angle EAB = 3\angle A'AB$ となっている.

折り紙による角の３等分

長方形 $ABCD$ に対して辺 CD 上に点 E をとり，$\angle EAB$ の角を 3 等分する．

折り紙による角の３等分の折り方

1. 辺 AD 上に点 F をとる．
2. A と F を重ねて折ったとき辺 AD 上の折り目との交点を G，辺 BC 上の折り目との交点を H とする．
3. F を線分 AE 上に， A を GH 上に重なるように折り，それぞれの写った点を F'，A' とする．
4. $\angle EAB = 3\angle A'AB$ となっている．

長方形 $ABCD$ に対して辺 CD 上に点 E をとり，$\angle EAB$ の角を 3 等分する．

折り紙による角の3等分の折り方

1. 辺 AD 上に点 F をとる．
2. A と F を重ねて折ったとき辺 AD 上の折り目との交点を G，辺 BC 上の折り目との交点を H とする．
3. F を線分 AE 上に， A を GH 上に重なるように折り，それぞれの写った点を F'，A' とする．
4. $\angle EAB = 3\angle A'AB$ となっている．