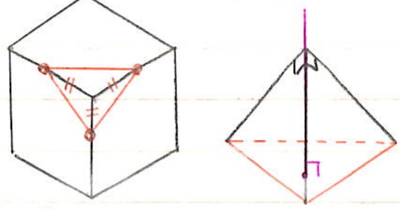
正多面体
と
正多胞体

西原中学校　2年
野口真由

● 正多面体

1. 有限個の面で囲まれた凸多面体である
2. 各面はすべて合同な正多角形である
3. 各頂点はすべて合同な正多角錐である →各頂点のまわりの形は同一の正多角錐の形
→従って、各頂点のまわりの面の数は同数



この場合、正三角錐

一般的には、3は 3'すべての頂点のまわりの面は同じである として、定義されている。

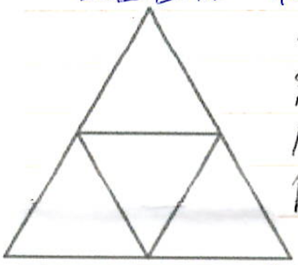
☆ プラトンの5つの正多面体

正多面体は、別名 プラトンの立体 ともいう。ギリシャ時代には火・地・空気・水など宇宙を構成するとして 5つの正多面体（正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体）が既に発見され、正多面体はこの5つしかなく、正二十面体以上の正多面体がないことも解っていた。正三角形は6つ集まると平面ができるが、5枚以下で貼り合わせれば立体になる。正方形（4枚）と正五角形（5枚）が正多角形を構成する正多角形である。多面体はこの正多面体を基本として発展し、その応用形態にはたくさんの種類や造形的な可能性がある。

☆ 正多面体の展開図

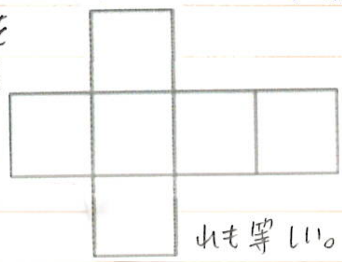
正多面体の展開図はそれぞれ1つではない。

～正四面体の展開図～



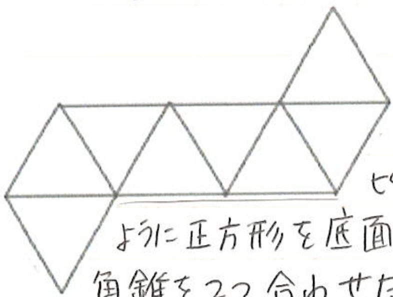
4枚の正三角形を組み合わせて構成されている。正三角錐とも呼ぶ。

～正六面体の展開図～



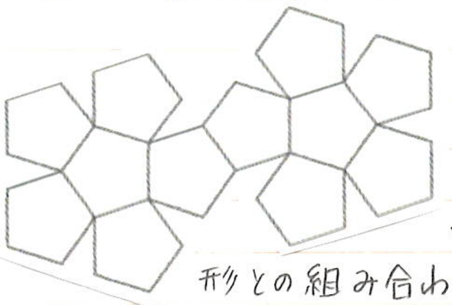
正方形6枚で構成されている。立方体の呼称である。全部で11種類の展開図の取り方がある。辺の長さだけでなく、すべての角は90°でこれも等しい。面や辺同士は3方向で平行になる。

～正八面体の展開図～



正三角形8枚による正多角形。ピラミッドのように正方形を底面とする正四角錐を2つ合わせた形。

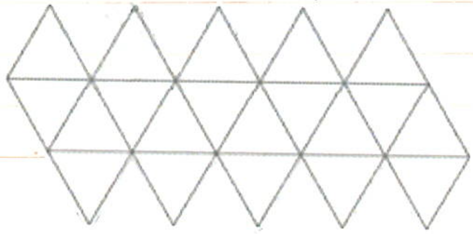
～正十二面体の展開図～



正五角形12枚によって構成される正多面体。稀にサッカーボールの展開図と同じと間違えている人がいるが、サッカーボールは正六角形との組み合わせでできている。

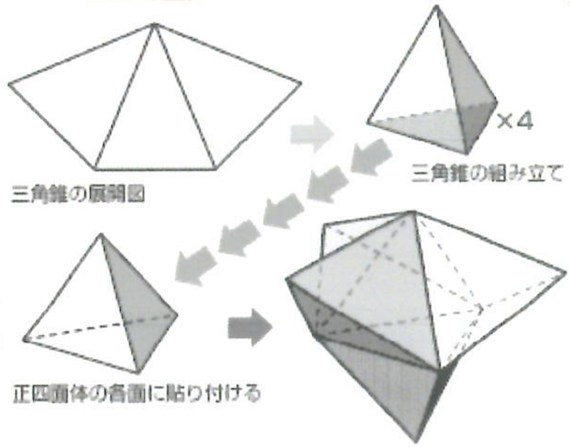
～正二十面体の展開図～

正三角形20枚によって構成される正多面体。かなり、球に近づいてくる。



☆多面体の展開

正多面体が正三角形と正方形、正五角形でできているなら、それらを底面として考え、色々な多面体を作り各面に貼り付けていくと、複雑な多面体の応用立体ができあがる。正多角形の各面を膨らませるだけでなく、穴を開けたり、各面をその他の加工を加えながら正多面体の構造に合わせると、更にたくさんの多面体応用立体を作ることができる。しかし複雑な形態になる程、1枚の紙で展開図を取ることができなくなる。そこで「パーツ分け」と考え、パーツごとに色を変えたり、ジョイント方法を工夫するとより面白い展開が広がっていき、パッケージデザインなどに応用できる。

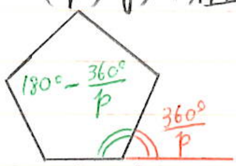


底面が正三角形になる三角錐を作り、正四面体の各面に貼り付けると全く違った多面体ができます。

☆正多面体はどれだけあるか？

合同な正多角形 → 正p角形　合同な正多角錐 → 正q角錐（頂点の周りにq個の面）

・(p, q)の組で可能なものを調べる　◎凸な多面体の頂点に集まる内角の和は360°未満



$180° - \frac{360°}{p} \times q$

$$\left(180° - \frac{360°}{p}\right) \times q < 360°$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \times q < 1$$

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$（p, q：3以上の整数）

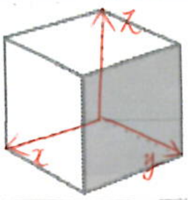
		2枚	3枚	4枚	5枚	6枚
正三角形	△	×	○	○	○	×
正方形	□	×	○	×	×	×
正五角形	⬠	×	○	×	×	×
正六角形	⬡	×	×	×	×	×

(p, q)の組は
(3, 3) … 正四面体
(3, 4) … 正八面体
(3, 5) … 正二十面体
(4, 3) … 正六面体
(5, 3) … 正十二面体

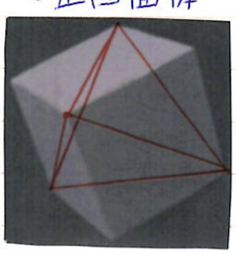
☆正多面体の構成

座標空間（xyz−空間）で考える。頂点の座標を与えて正多面体になっていることを確かめればよい。　(4, 3) 4辺の面が1つ　・正四面体

・正六面体（立方体）← の頂点に3つ



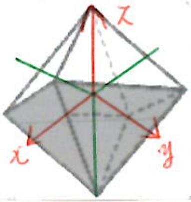
頂点(±1, ±1, ±1) 8ケ
（複合任意）
1辺　2



頂点 (1, 1, 1)
(1, −1, −1)
(−1, 1, −1)
(−1, −1, 1)　4ケ

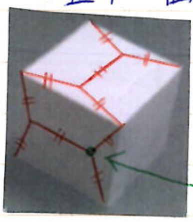
1辺
$2\sqrt{2}$

◦正八面体



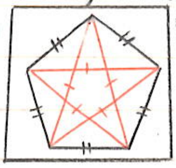
頂点
$(\pm1, 0, 0)$
$(0, \pm1, 0)$ 6ヶ
$(0, 0, \pm1)$

◦正十二面体



$(t, \frac{1}{t}, 0)$

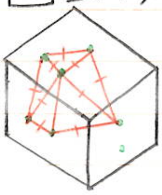
頂点 $(\pm1, \pm1, \pm1)$ 8ヶ
$(\pm t, \pm\frac{1}{t}, 0)$ 4ヶ
$(0, \pm t, \pm\frac{1}{t})$ 4ヶ　20ヶ
$(\pm\frac{1}{t}, 0, \pm t)$ 4ヶ

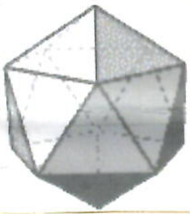


$t = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\cdots$
(黄金比の数値)
$t^2 - t - 1 = 0$ の $t > 0$ の根
$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

◦正二十面体

$\boxed{:}$ 正方形に左図のような2の目を考える





頂点 $(\pm1, \pm\frac{1}{t}, 0)$ 4ヶ
$(0, \pm1, \pm\frac{1}{t})$ 4ヶ　12ヶ
$(\pm\frac{1}{t}, 0, \pm1)$ 4ヶ

これより、正多面体は上記の5種類である。

◦正多面体が5つ存在し、5つしか存在しないことを証明したのは、古代ギリシャの数学者テアイテトスである。

◎正胞体 … 4次元空間における正多面体の概念の拡張

1. 有限個の多面体で囲まれた凸な図形である。
2. 各多面体は、すべて合同な正多面体である。
3. 各頂点は、すべて合同な正多面体錐である。

～頂点のまわりに正多面体を集めるとき、いくついるか？～

・正四面体
- 4ヶ → (正多胞体が)できる → 正五胞体
- 8ヶ → 〃 → 正十六胞体
- 20ヶ → 〃 → 正六百胞体

・正六面体
- 4ヶ → できる → 正八胞体
- 8ヶ → できない
- 20ヶ → 〃

・十二面体
- 4ヶ → できる → 正百二十胞体
- 8ヶ → できない
- 20ヶ → 〃

・正八面体 → 6ヶ → できる → 正二十四胞体
・正二十面体 → 12ヶ → できない

上記の6種類ある。

◦正多胞体は四次元立体なので、再現できないが、三次元に射影して、三次元の模型としてみることができる。